ECOLE des HAUTES ETUDES COMMERCIALES du NORD

page 293
1987

edhec
ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

CONCOURS D'ADMISSION 1987

AUCUN DOCUMENT AUTORISE

MATHEMATIQUES
Epreuve commune E I S T I

OPTION GENERALE : Durée : 4 heures - Coefficient : 5

Option Economique : Durée : 4 heures - Coefficient : 5
Option Technologique : Durée : 4 heures - Coefficient : 4

Lors de la correction, il sera tenu compte de la clarté des raisonnements et du soin apporté aux copies:

A) La difficulté de tous les problèmes est progressive.
Pour démontrer votre faculté de raisonnement mathématique nous vous conseillons de traiter en priorité un problème le plus complètement possible, plutôt que de traiter des questions éparses dans tous les problèmes.

B) Pour résoudre une question d'un problème, vous pouvez.
si vous l'estimez nécessaire, utiliser les résultats des questions précédentes, même si vous ne les avez pas résolues.

Le barème de correction est adapté en fonction des problèmes propres à chaque option.

## ALGEBRE: EVOLUTION D'UN MARCHE

**Trois entreprises (numérotées 1, 2 et 3) vendent un produit et sont directement en concurrence sur ce produit. La répartition des ventes entre les entreprises évoluent d'une pèriode à l'autre. Pour mesurer cette répartition, on calcule les parts de marché.**

Parts de marché:
Si l'entreprise N°1 vend 200 produits
l'entreprise N°2 vend 125 produits
l'entreprise N°3 vend 175 produits
il y a 500 produits vendus et les parts de marché respectives seront de:
entreprise N°1 : 200/500=0,4
entreprise N°2 : 125/500=0,25
entreprise N°3 : 175/500 =0,35

**Les parts de marché de la période n seront notées $p_1(n)$, $p_2(n)$ et $p_3(n)$. La période initiale sera la période 0. D'une période à l'autre, les parts de marché évoluent par le jeu de coefficients d'absorption $a_{i,j}$(i et j indices d'entreprises).**

Coefficients d'absorption: En prenant les parts de marché précédentes, $a_{1,2}$=0,6 signifie que 60% du marché de l'entreprise N°2 va revenir à l'entreprise N°1, en l'occurence 60% de 25% du marché total.

**Enfin, on supposera que d'une période à l'autre, les coefficients d'absorption ne varient pas.**

Le but du problème est d'étudier l'évolution des parts de marché.

I) Montrer que $\forall\ j\in\{1,2,3\}$ $\quad a_{1,j}+a_{2,j}+a_{3,j}=1$

II) Etablir l'égalité suivante: $\begin{pmatrix}p_1(1)\\p_2(1)\\p_3(1)\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}p_1(0)\\p_2(0)\\p_3(0)\end{pmatrix}$

où A est la matrice (3,3) de terme général $a_{i,j}$

III) a) Etablir l'égalité suivante: $\begin{pmatrix}p_1(n)\\p_2(n)\\p_3(n)\end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix}p_1(0)\\p_2(0)\\p_3(0)\end{pmatrix}$

b) Montrer que $\forall\ j\in\{1,2,3\}$ $\quad a(n)_{1,j}+a(n)_{2,j}+a(n)_{3,j}=1$

où $a(n)_{i,j}$ est le terme général de la matrice $A^n$.

c) Que représentent les termes $a(n)_{i,j}$

Dans ce qui suit, on supposera que A est diagonalisable et que toutes ses valeurs propres sont simples et différentes de -1.

IV) Montrer que 1 est valeur propre de la matrice A.

V) Montrer que les autres valeurs propres sont, en valeur absolue, strictement inférieures à 1.

VI) En déduire l'évolution des parts de marché à long terme.

Tournez la page S.V.P.

# PROBABILITE: THEORIE DES TESTS

OPTION GENERALE Seule

On dispose de deux machines A et B. Chaque machine a pour fonction de générer un nombre sur un écran. On peut considérer que les nombres générés par chacune d'elle sont des réalisations d'une variable aléatoire normale. On suppose de plus que les réalisations successives d'une machine sont indépendantes.

On note $X_A$ la variable aléatoire générée par la machine A. L'esperance de $X_A$ est égale à 4 et son écart-type égal à 1.

On note $X_B$ la variable aléatoire générée par la machine A. L'esperance de $X_B$ est égale à 4,5 et son écart-type égal à 1.

Un animateur choisit au hasard, l'une des deux machines. Puis il génère 100 valeurs à l'aide de cette machine, dont il calcule la moyenne notée X.

Il communique la valeur de X à un joueur qui ne sait pas quelle machine a été choisie.

**Le but du joueur est dans la mesure du possible de trouver la machine qui a été choisie, en connaissant la valeur de X.**

I) a) Montrer que pour toute valeur de X, le joueur ne peut affirmer avec certitude quelle machine a été choisie.

b) Quelle est la loi de X si la machine A a été choisie ?

c) Quelle est la loi de X si la machine B a été choisie ?

(Rappel toute combinaison linéaire de variables normales indépendantes est une variable normale)

II) Le joueur décide de parier sur l'une des deux machines en adoptant une certaine règle.

On définit les évènements suivants:

$D_A$ le joueur parie sur A $D_B$ le joueur parie sur B

$R_A$ l'animateur a choisi A $R_B$ l'animateur a choisi B

On définit les probabilités suivantes:

$p_1 = P(D_B / R_A)$ $p_2 = P(D_A / R_B)$

a) Que représentent $p_1$ et $p_2$ ?

Le joueur décide d'adopter la régle (1) suivante:

Il se donne un nombre réel p compris entre 0 et 0,05. Puis il cherche x tel que $P(X > x / R_A) < p$ et $P(X < x / R_B)$ la plus petite possible.

Si la valeur de X donnée par l'animateur est superieure à x, le joueur parie sur B, sinon sur A.

b) Que vaut x pour p =0,05 ? (on justifiera le calcul)

c) Que valent $p_1$ et $p_2$ pour p =0,05 ?

III) Le joueur décide maintenant d'adopter la régle (2) suivante: Il se donne un nombre réel p compris entre 0 et 0,05. Puis il cherche x tel que $P(X < x / R_A) < p$ et $P(X > x / R_B)$ la plus petite possible.

Si la valeur de X donnée par l'animateur est superieure à x, le joueur parie sur A, sinon sur B.

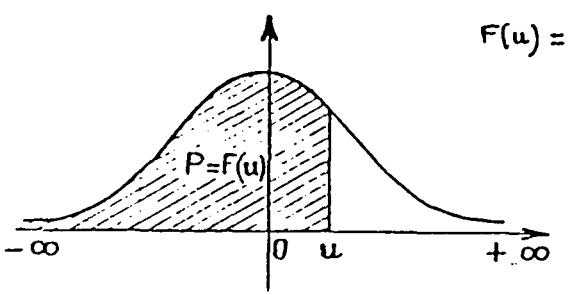
a) Montrer que pour la même valeur de p, la valeur $p_2$ est plus grande quand le joueur applique la règle (2) plutôt que la règle (1).

b) Si vous aviez à choisir l'une des deux règles, laquelle choisiriez-vous et pourquoi ?

IV) En revenant à la régle (1) et pour une valeur de p donnée, que pourrait demander le joueur à l'animateur pour diminuer la valeur de $p_2$ ?

Fonction de répartition de la loi normale réduite
(Probabilité de trouver une valeur inférieure à u)

$$F(u) = \int_{-\infty}^{u} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$




Tournez la page S. V. P.

| u | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,5000 | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120 | 0,5160 | 0,5199 | 0,5239 | 0,5279 | 0,5319 | 0,5359 |
| 0,1 | 0,5398 | 0,5438 | 0,5478 | 0,5517 | 0,5557 | 0,5596 | 0,5636 | 0,5675 | 0,5714 | 0,5753 |
| 0,2 | 0,5793 | 0,5832 | 0,5871 | 0,5910 | 0,5948 | 0,5987 | 0,6026 | 0,6064 | 0,6103 | 0,6141 |
| 0,3 | 0,6179 | 0,6217 | 0,6255 | 0,6293 | 0,6331 | 0,6368 | 0,6406 | 0,6443 | 0,6480 | 0,6517 |
| 0,4 | 0,6554 | 0,6591 | 0,6628 | 0,6664 | 0,6700 | 0,6736 | 0,6772 | 0,6808 | 0,6844 | 0,6879 |
| 0,5 | 0,6915 | 0,6950 | 0,6985 | 0,7019 | 0,7054 | 0,7088 | 0,7123 | 0,7157 | 0,7190 | 0,7224 |
| 0,6 | 0,7257 | 0,7290 | 0,7324 | 0,7357 | 0,7389 | 0,7422 | 0,7454 | 0,7486 | 0,7517 | 0,7549 |
| 0,7 | 0,7580 | 0,7611 | 0,7642 | 0,7673 | 0,7704 | 0,7734 | 0,7764 | 0,7794 | 0,7823 | 0,7852 |
| 0,8 | 0,7881 | 0,7910 | 0,7939 | 0,7967 | 0,7995 | 0,8023 | 0,8051 | 0,8078 | 0,8106 | 0,8133 |
| 0,9 | 0,8159 | 0,8186 | 0,8212 | 0,8238 | 0,8264 | 0,8289 | 0,8315 | 0,8340 | 0,8365 | 0,8389 |
| 1,0 | 0,8413 | 0,8438 | 0,8461 | 0,8485 | 0,8508 | 0,8531 | 0,8554 | 0,8577 | 0,8599 | 0,8621 |
| 1,1 | 0,8643 | 0,8665 | 0,8686 | 0,8708 | 0,8729 | 0,8749 | 0,8770 | 0,8790 | 0,8810 | 0,8830 |
| 1,2 | 0,8849 | 0,8869 | 0,8888 | 0,8907 | 0,8925 | 0,8944 | 0,8962 | 0,8980 | 0,8997 | 0,9015 |
| 1,3 | 0,9032 | 0,9049 | 0,9066 | 0,9082 | 0,9099 | 0,9115 | 0,9131 | 0,9147 | 0,9162 | 0,9177 |
| 1,4 | 0,9192 | 0,9207 | 0,9222 | 0,9236 | 0,9251 | 0,9265 | 0,9279 | 0,9292 | 0,9306 | 0,9319 |
| 1,5 | 0,9332 | 0,9345 | 0,9357 | 0,9370 | 0,9382 | 0,9394 | 0,9406 | 0,9418 | 0,9429 | 0,9441 |
| 1,6 | 0,9452 | 0,9463 | 0,9474 | 0,9484 | 0,9495 | 0,9505 | 0,9515 | 0,9525 | 0,9535 | 0,9545 |
| 1,7 | 0,9554 | 0,9564 | 0,9573 | 0,9582 | 0,9591 | 0,9599 | 0,9608 | 0,9616 | 0,9625 | 0,9633 |
| 1,8 | 0,9641 | 0,9649 | 0,9656 | 0,9664 | 0,9671 | 0,9678 | 0,9686 | 0,9693 | 0,9699 | 0,9706 |
| 1,9 | 0,9713 | 0,9719 | 0,9726 | 0,9732 | 0,9738 | 0,9744 | 0,9750 | 0,9756 | 0,9761 | 0,9767 |



ECOLE des HAUTES ETUDES COMMERCIALES du NORD

page 295
1987

## PROBABILITES: JEU A SOMME CONSTANTE

Option Economique
Option Technologique Seules

Deux joueurs (nommés A et B) jouent l'un contre l'autre. Chaque joueur possède deux jetons au départ. Le jeu se déroule de la façon suivante:

Le jeu est décomposé en une succession d'épreuves indépendantes. Pour une épreuve, chaque joueur mise un jeton. Il y a un gagnant et un perdant à la fin de chaque épreuve, le gagnant ramasse la mise. Le jeu se termine quand l'un des joueurs n'a plus de quoi miser. A chaque épreuve, le joueur A a une probabilité p (p fixé) de remporter l'épreuve.

On note $JA_i$, la variable aléatoire, donnant le nombre de jetons que possède le joueur A à la fin de l'épreuve no i.
On note $G_A$, l'évènement "A gagne le jeu".

I) a) Décrire, sous forme d'un arbre, les différentes valeurs possibles de $JA_i$ à la fin des épreuves 1 et 2. On affectera dans cet arbre les probabilités correspondantes.
b) Montrer que $P(G_A / JA_2 = 2) = P(G_A)$ .
c) En déduire la valeur de $P(G_A)$.

II) a) On note X la variable aléatoire donnant le nombre d'épreuves jouées sachant que le joueur A gagne le jeu. Déterminer la loi de X.

b) On note Y la variable aléatoire donnant le nombre d'épreuves jouées ne sachant pas quel joueur gagne. Déterminer la loi de Y.

III) Refaire le calcul de $P(G_A)$, en accordant en début de jeu, un jeton au joueur A et trois jetons au joueur B.

Tournez la page S. V. P.

# ANALYSE: PROGRAMMATION DYNAMIQUE

Soient L un nombre réel strictement positif et n un entier naturel non nul. On définit l'ensemble D(n,L) par

$$D(n,L) = \left\{ (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in R^n \text{ tel que } a_1+a_2+\ldots+a_n = L \text{ et } a_1 \geqslant 0,\ a_2 \geqslant 0 \ldots\ a_n \geqslant 0 \right\}$$

De même on définit S(n,L) par

$$S(n,L) = \left\{ \begin{array}{l} (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in D(n,L) \text{ tel que :} \\ \\ \forall (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in D(n,L) \\ \\ a_1 * a_2 * \ldots * a_n \leqslant b_1 * b_2 * \ldots * b_n \end{array} \right\}$$

(le symbôle (*) correspond à la multiplication).

Le but du problème est de trouver le ou les éléments de S(n,L).

Pour chercher ce ou ces éléments, nous allons d'abord montrer que ce problème se ramène à la recherche de n maxima de fonctions numériques. Puis on en déduira le résultat.

I) Cas particulier: n=2

a) Reformuler le problème, en supprimant du produit les inconnues $a_2$ et $b_2$.

b) Trouver le ou les éléments de S(2,L).

II) Cas général: n quelconque superieur ou égal à 2.

a) Soit $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ un élément de S(n,L).

a-1) Montrer que $b_i$ est strictement positif pour tout i élément de {1,2,.....,n}.

a-2) Montrer que $(b_1, b_2, \ldots, b_{n-1})$ est un élément de $S(n-1, L - b_n)$.

b) En déduire, en raisonnant par récurrence, que S(n,L) est réduit au seul élément (L/n, L/n, ....., L/n).

Option générale Seule :

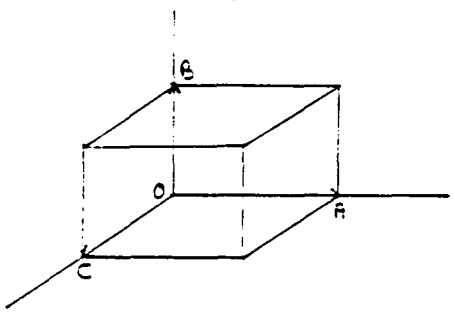
III) On munit $R^3$ d'un repére orthogonal $(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC})$ tel que : $||\vec{OA}|| + ||\vec{OB}|| + ||\vec{OC}|| = 3$

( $||\vec{V}||$ désigne la norme classique c.a.d:

$||\vec{V}|| = \sqrt{x*x + y*y + z*z}$ où x, y et z sont les coordonnées de V)

a) O,A,B et C déterminent un parallélipipède (cf figure).

Montrer que le parallélipipède de plus grand volume est celui correspondant à un repère orthonormé.




b) généraliser le résultat précédent à $R^n$ .